

ЖАИ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР



Харьковский авиационный институт
им. Н. Е. Жуковского

С. А. ПОЛТАРУШНИКОВ

**УСТОЙЧИВОСТЬ
ПРОДОЛЬНО-
СЖАТОГО СТЕРЖНЯ**

**(Учебное пособие
по лабораторной работе)**

Харьков
Харьковский авиационный институт
1980

Устойчивость продольно-скатого стержня. (Учебное пособие по лабораторной работе)/ Полтарушников С.А. - Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1980. - 12 с.

Настоящее учебное пособие предназначено для косвенного экспериментального определения критической силы Эйлера. Применяется только формула Эйлера, так как формула Ясинского, предназначенная для определения критической силы за пределом пропорциональности, является эмпирической.

Работа предназначена для проведения в рамках лабораторного практикума по курсу "Сопоставление материалов" для студентов авиадвигателестроительного и самолетостроительного факультетов Харьковского авиационного института.

Постановка работы обусловлена необходимостью экспериментальной проверки и подтверждения правильности классической формулы Эйлера.

Ил. 4. Табл. 2.



Цель работы: определение величины критической силы.

1. Содержание работы

Устойчивость упругого равновесия и критическая нагрузка

Некоторая геометрическая форма упругого равновесия сжатого стержня является устойчивой, если сколь угодно малые поперечные нагрузки приводят к малым искажениям исходной формы стержня и снятие этих поперечных нагрузок сопровождается восстановлением исходной формы стержня.

Эта же форма упругого равновесия сжатого стержня является неустойчивой, если при сколь угодно малом поперечном воздействии деформации стержня возрастают до величин, приводящих к возникновению других форм упругого или неупругого равновесия, или к разрушению стержня.

Параметром, величина которого позволяет судить об устойчивости или неустойчивости данной формы равновесия конкретного стержня, является продольное сжимающее усилие.

Сжимающее усилие, при котором заданная геометрическая форма упругого равновесия стержня из устойчивой превращается в неустойчивую, называется критической силой.

Инженеров-расчетчиков обычно интересует то значение сжимающей силы, при котором исходная "прямая" форма равновесия стержня теряет устойчивость. Именно это значение сжимающей силы называется первой критической, или эйлеровой силой. Обычно ее называют просто критической силой. Если сжимающее усилие приобретает величину, превосходящую критическое значение, то стержень либо разрушается, либо в нем развиваются недопустимо большие упругие или упруго-пластические деформации. Поэтому критическую силу необходимо считать предельным значением продольной сжимающей силы для стержней:

$$P_{\text{пред.с.}} = P_{\text{кр}} \quad (1)$$

Значение $P_{\text{кр}}$ следует определять в пределах пропорциональности по формуле Эйлера:

$$P_{\text{кр}}^2 = \frac{\pi^2 E J_{\text{min}}}{(l \mu)^2} \quad (2)$$

Эта формула применима для стержней большой гибкости:

$$\lambda = \lambda_{кр} = \pi \sqrt{\frac{E}{E_{кр}}} \quad (3)$$

Если же $\lambda < \lambda_{кр}$, то для определения критической силы необходимо использовать эмпирическую формулу Ясинского

$$P_{кр} = F(a - b\lambda). \quad (4)$$

Очевидно, что эта формула справедлива, пока

$$\lambda > \frac{a - b_2}{b}. \quad (5)$$

Если же $\lambda < \frac{a - b_2}{b}$, то предельное значение скинцного условия следует находить из выражения

$$P_{пред.с} = b_2 \cdot F. \quad (6)$$

Следует заметить, что элементы, гибкость которых $\lambda < \frac{a - b_2}{b}$, обычно нельзя отнести к разряду тех, которые называются стержнями, так как у этих элементов соизмеримы длина и размеры поперечного сечения.

Совершенно очевидно, что выражение (4) не требует экспериментальной проверки, так как является результатом обработки экспериментальных данных.

2. Косвенное экспериментальное определение критической силы Эйлера

Выражение (2) было получено в предположении, что:

- а) до приложения поперечного возмущения стержень имеет идеально прямолинейную продольную ось;
- б) материал стержня абсолютно однороден;
- в) линия действия продольной сжимающей силы совпадает с продольной осью стержня до приложения поперечного возмущения.

Следует помнить, что в технической практике невозможно создать конструкций, в которой в полной мере было бы реализовано хотя бы одно из этих условий. Даже самые незначительные отклонения от соблюдения условий а), б), в) (а таковые всегда имеются в реальной конструкции) приводят к тому, что стержень теряет устойчивость при сжимающей силе, меньшей, чем $P_{кр}^0$.

По этой же причине величина $P_{кр}^0$ для реальной конструкции терпит физический оmissions и представляет собой некоторое асимптотическое значение сжимающей силы, к которому стремится предельная сжимающая сила для реальной конструкции по мере ее приближения к идеальной (эйлеровой) расчетной схеме.

Следовательно, прямое экспериментальное определение $P_{кр}^0$ невозможно.

Казалось бы, вопрос состоит в том, чтобы определить, при каком значении продольной сжимающей силы реальный стержень получает деформации, равные предельным, или разрушается, и эту силу считать предельной, а не $P_{кр}^0$. Однако решение этой задачи наталкивается на непреодолимые трудности, связанные с численной оценкой и формулировкой несовершенств каждого конкретного стержня по пунктам а), б), в).

По этой же причине $P_{кр}^0$ следует принимать в качестве предельного значения сжимающей силы, но учитывать, что для реальных стержней предельная сжимающая сила несколько меньше $P_{кр}^0$, поэтому запас устойчивости μ обычно берется несколько больше, чем запас прочности при расчете на сжатие.

Рассмотрим один из вариантов косвенного определения $P_{кр}^0$. Допустим, что необходимо определить $P_{кр}^0$ для стержня, показанного на рис. 1.

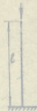


Рис. 1

Известно, что теоретически $P_{кр}^0$ можно найти в этом случае по формуле

$$P_{кр}^0 = \frac{\pi^2 E J}{(2l)^2} \quad (7)$$

Для решения задачи об экспериментальном определении $P_{кр}^0$ рассмотрим вопрос о деформировании стержня, показанного на рис. 2. Этот стержень, как и все реальные сжимаемые стержни, работает в условиях продольно-поперечного изгиба, если нагрузка приложена так, как показано на рис. 3.

6.

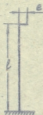


Рис. 2

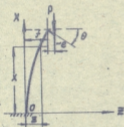


Рис. 3

На этом же рисунке схематически показаны отержань после приложения нагрузки P.

Дифференциальное уравнение упругой линии отержань (при $f \ll l$) имеет вид:

$$EJ_{min} \cdot z'' = M, \quad (8)$$

где

$$M = P(e + f - z). \quad (9)$$

Тогда

$$EJ_{min} \cdot z'' + P \cdot z = P(e + f), \quad (10)$$

или

$$z'' + \kappa^2 z = \kappa^2(e + f). \quad (11)$$

Принимаем

$$\kappa^2 = \frac{P}{EJ_{min}}. \quad (12)$$

Решением уравнения (11) является:

$$z = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x + e + f. \quad (13)$$

Произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий:

1) при $x=0$ $z' = 0$, т.е. $C_1=0$;

2) при $x=0$ $z = 0$, т.е. $C_2 = -(e + f)$.

Величину f находим из условия, что при $x=l$ $z=f$,

т.е.

$$f = e \frac{1 - \cos \kappa l}{\cos \kappa l}. \quad (14)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{e}{e+f} = \cos \kappa \ell, \quad (15)$$

откуда

$$\kappa \cdot \ell = \arccos \left(\frac{e}{e+f} \right). \quad (16)$$

Учитывая соотношение (12), перепишем (16) в следующем виде (правая и левая части (16) возведены в квадрат):

$$\frac{P}{E J_{\min}} \ell^2 = \left[\arccos \left(\frac{e}{e+f} \right) \right]^2. \quad (17)$$

Преобразуем левую часть последнего выражения:

$$\frac{P}{E J_{\min}} \ell^2 = \frac{\pi^2 P}{4 \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(2\ell)^2}} = \frac{\pi^2 P}{4 P_{kp}^0}.$$

Теперь уравнение (17) примет вид

$$\frac{\pi^2 P}{4 P_{kp}^0} = \left[\arccos \left(\frac{e}{e+f} \right) \right]^2, \quad (18)$$

откуда окончательно получим

$$P_{kp}^0 = \frac{\pi^2 \cdot P}{4 \left[\arccos \left(\frac{e}{e+f} \right) \right]^2}. \quad (19)$$

Отметим следующее:

1) так как $0 < P < P_{kp}^0$, то, следовательно,

$$0 < \arccos \left(\frac{e}{e+f} \right) < \frac{\pi}{2};$$

2) в данной методике нет причин, по которой ограничивается значение e . Увеличение же абсолютного значения e дает возможность не учитывать остальные несовершенства реального объекта по сравнению с расчетной схемой.

Рассмотрим последствия того, что в уравнении (9) стоит e , а не $e \cos \theta$. Для уяснения пользы внесения погрешности приведем конкретный пример.

Пусть даны

$$l \text{ и } e = f = q_1 l.$$

Из (13) и (14) следует, что

$$z = e \frac{1 - \cos \kappa l}{\cos \kappa l},$$

откуда

$$z' = \theta = e \cdot \kappa \cdot \frac{\sin \kappa l}{\cos \kappa l},$$

Так как нас интересует значение θ при $z = l$, то

$$\theta_{\text{конт}} = e \cdot \kappa \cdot \operatorname{tg} \kappa l. \quad (20)$$

Из (14) видно, что при $e = f$

$$\cos \kappa l = \frac{1}{2},$$

$$\text{т.е. } \kappa l = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{откуда } \kappa = \frac{\pi}{3l}.$$

$$\text{Тогда } \theta_{\text{конт}} = \frac{e \cdot \pi}{3l} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{q_1 \cdot 3.14}{3} \cdot \sqrt{3} = 0.161 \text{ рад},$$

$$\text{или } \theta_{\text{конт}} = 10^\circ 20'.$$

Следовательно,

1) $\cos 10^\circ 20' = 0.9838$, что вполне оправдывает использование (9).

$$2) \operatorname{tg} 10^\circ 20' = 0.1823.$$

$$(\operatorname{tg} \theta)^2 = (z')^2 = 0.033, \text{ что оправдывает использование (8).}$$

Из этого примера видно, что если в процессе проведения эксперимента не выходить за пределы соотношений

$e < 0.1l$ и $f \leq e$, то точность $\pm 5\%$ при определении $R_{\text{кр}}^0$ будет обеспечена.

3. Испытательная машина (рис. 4, где 1 - платформа, 2 - испытываемый стержень, 3 - груз, 4 - индикатор для измерения величины прогиба λ).

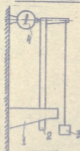


Рис. 4

4. Порядок выполнения работы

I. Произвести обмер образца и определить основные геометрические характеристики его сечения. Данные записать в таблицу.

Таблица

l см	d см	b см	h см	F см ²	J_{min} см ⁴	i_{min} см ²	$W_{k0.min}$ см ³

2. Определять гибкость образца по следующей формуле:

$$\lambda = \frac{\sqrt{E}}{i_{min}}$$

и сравнить ее с предельной для материала образца:

$$\lambda_{пред} = 9 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{ог}}}}$$

3. Вычислить теоретическое значение $R^3_{кр}$:

$$R^3_{кр} = \frac{E^2 F J_{min}}{(\sqrt{E})^2}$$

4. Из условия $\frac{M_{max}}{W_{k0.min}} < \sigma_{\text{ог}}$ определить наибольшее значение M_{max} :

$$M_{max} = R(e+f) < \sigma_{ог} \cdot W_{k0.min}. \quad (21)$$

10.

Опыт показывает, что при $e \leq 0,1 \ell$ рациональнее всего ограничить значение силы P величиной

$$P_{\max} = (a_2 + a_{25})P_{кр.г.},$$

что обеспечит достаточный запас для соблюдения неравенства (I).

5. Нагрузить образец и замерить величину f . При этом необходимо следить за соблюдением неравенства (2I) при подходе к P_{\max} . Данные записать в таблицу.

Таблица

P, кг		$\sim 0,5P_{\max}$	$\sim 0,7P_{\max}$	$0,8P_{\max}$	$\sim P_{\max}$
f см	нагруз.				
	разгруз.				
	среднее				
P ^э кр					

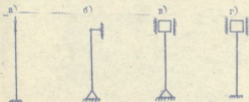
P^э_{кр} вычислить по формуле (I9).

7. Определить погрешность

$$\Delta = \left| \frac{P_{кр.г.}^{\text{э}} - P_{кр.г.}^{\text{с}}}{P_{кр.г.}^{\text{э}}} \right| \cdot 100\%$$

5. Контрольные вопросы

1. Какая форма упругого равновесия называется устойчивой?
2. Что называется критической силой?
3. По какой формуле определяется критическая сила при
 - а) $\lambda > \lambda_{пред}$;
 - б) $\lambda < \lambda_{пред}$?
4. Что называется гибкостью стержня?
5. По какой формуле определяется гибкость стержня?
6. Что называется приведенной длиной стержня?
7. Как учитывается в формуле Эйлера способ крепления концов стержня?
8. Что называется предельной гибкостью?
9. Чему равно значение коэффициента приведения для указанных способов крепления концов стержня?



10. Почему формула Эйлера для крепления Р_{кр} справедлива только в пределах пропорциональности?
11. Каким образом получена формула Ясинского?

Сергей Андреевич Полтарушников
Устойчивость продольно-сжатого стержня
(Учебное пособие по лабораторной работе)

Ответственный за выпуск Л.Я. Кравец

Редактор С.П. Гевло

Подписано к печати 30.01.80 г.
Формат 60x90/16. Бумага офс. № 2, офс. печ.
Усл: печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,51, Тираж 700. Заказ 53, Цена 2 к.

Изготовлено на ротационной в типографии ХЛН
Харьков-191, ул. Чкалова, 17

2 коп.